ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Πείραμα: Μία φυσική διαδικασία με ένα αριθμό παρατηρήσιμων αποτελεσμάτων.

Παραδείγματα πειραμάτων και αντίστοιχα πιθανά αποτελέσματα:

Πιθανά αποτελέσματα ρίψης νομίσματος={Κ, Γ}

Πιθανά αποτελέσματα ρίψης ενός ζαριού={1,2,3,4,5,6}

Κανόνας του γινομένου

Αν ένα πείραμα έχει m πιθανά αποτελέσματα και ένα άλλο έχει n πιθανά αποτελέσματα, τότε υπάρχουν m x n πιθανά αποτελέσματα όταν γίνονται και τα δύο αυτά πειράματα.

Κανόνας του αθροίσματος

Αν ένα πείραμα έχει m πιθανά αποτελέσματα και ένα άλλο έχει n πιθανά αποτελέσματα, τότε υπάρχουν $m + n$ πιθανά αποτελέσματα όταν γίνεται ακριβώς ένα από τα δύο αυτά πειράματα.

Θεμελιώδης αρχή της απαρίθμησης

Το έργο της απαρίθμησης χωρίζεται σε επί μέρους φάσεις.

Ο χωρισμός πρέπει να γίνει έτσι ώστε οι φάσεις να είναι ανεξάρτητες, είτε να είναι διαδοχικές αλλά τέτοιες ώστε η απαρίθμηση σε κάθε φάση να εξαρτάται μόνο από τις φάσεις που προηγήθηκαν.

Στην περίπτωση αυτή σύμφωνα με το παραπάνω κανόνα του γινομένου **το σύνολο της απαρίθμησης ισούται με το γινόμενο των επί μέρους απαριθμήσεων.**

Παράδειγμα: Έστω ότι το όνομα μίας μεταβλητής μπορεί να είναι είτε ένα γράμμα είτε ένα γράμμα ακολουθούμενο από ένα αριθμητικό ψηφίο. Πόσα διαφορετικά ονόματα μεταβλητών υπάρχουν;
(Απ.υπάρχουν 240+24=264 διαφορετικά ονόματα μεταβλητών που να ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες.)

Μεταθέσεις και Διατάξεις

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε n διαφορετικά αντικείμενα σε n διαφορετικές αριθμημένες θέσεις με την προϋπόθεση ότι μία θέση μπορεί να χωρέσει μόνο ένα αντικείμενο;

Για το πρώτο αντικείμενο έχουμε n επιλογές θέσεων, για το δεύτερο αντικείμενο υπάρχουν n-1 επιλογές ελεύθερων θέσεων, … , και για το τελευταίο αντικείμενο υπάρχει 1 τελευταία κενή θέση.

Συνεπώς υπάρχουν **$n(n-1)(n-2)\cdots 1$ διαφορετικές <u>ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ</u>. Το γινόμενο το ονομάζουμε n-παραγοντικό και το συμβολίζουμε με το σύμβολο $n!$**

Άρα το πλήθος των **μεταθέσεων n αντικειμένων** είναι:

$$\boxed{n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n}$$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε ***k* διαφορετικά αντικείμενα σε *n* διαφορετικά αριθμημένες θέσεις** με την προϋπόθεση ότι μία θέση μπορεί να χωρέσει μόνο ένα αντικείμενο;

Για το πρώτο αντικείμενο έχουμε *n* επιλογές θέσεων, για το δεύτερο αντικείμενο υπάρχουν *n*-1 επιλογές ελεύθερων θέσεων, … , και για το *k* αντικείμενο υπάρχουν (*n*-*k*+1) ελεύθερες θέσεις.

Συνεπώς υπάρχουν ***n*(*n*-1)(*n*-2)¨(*n*-*k*+1) διαφορετικές <u>ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ</u> των *k* από *n* αντικείμενα. Για το γινόμενο αυτό χρησιμοποιούμε το σύμβολο *P*(*n*, *k*)**

Άρα το πλήθος των **διατάξεων των *k* από *n*** αντικείμενα είναι:

$$\boxed{P(n, k)= n!/(n-k)!}$$

Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 4 φοιτητές σε 7 θέσεις; (Απάντηση:840)

Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να προγραμματιστούν τρία διαγωνίσματα σε μία περίοδο πέντε ημερών, έτσι ώστε να μην έχουν προγραμματιστεί δύο διαγωνίσματα για την ίδια ημέρα; (Απάντηση:60).

Ένα ισοδύναμο πρόβλημα με το να τοποθετήσουμε μπάλες σε κουτιά είναι αυτό της διάταξης διακριτών αντικειμένων. Όταν λέμε ότι **διατάσσουμε *k* από *n* διακριτά αντικείμενα** εννοούμε ότι **επιλέγουμε *k* από τα *n* αντικείμενα με κάποια σειρά**. Η διάταξη *k* από *n* αντικείμενα ανάγεται στην πλήρωση *k* θέσεων με *k* από τα *n* διακριτά αντικείμενα.

Για τη πρώτη θέση υπάρχουν *n* επιλογές αντικειμένων, για τη δεύτερη θέση υπάρχουν *n*-1 επιλογές αντικειμένων (από τα υπόλοιπα *n*-1 αντικείμενα), … , και για τη *k* θέση υπάρχουν *n*-*k*+1 επιλογές (από τα *n*-*k*+1 υπόλοιπα αντικείμενα). Συνεπώς **υπάρχουν *P*(*n*, *k*) τρόποι για τη διάταξη *k* από τα *n* αντικείμενα.**

Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε συμβολοσειρές από τέσσερα διαφορετικά γράμματα; (Απάντηση: 255025)

Παράδειγμα: (α) Υποθέστε ότι δεν επιτρέπονται επαναλήψεις. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τα ψηφία 1, 2, 3, 5, 7, 8; (απάντηση: 360)
(**β**) Πόσοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι μικρότεροι από 4000; (απάντηση 180)
(**γ**) Πόσοι από τους αριθμούς του (α) είναι άρτιοι; (απάντηση:120)
(**δ**) Πόσοι από τους αριθμούς του (α) διαιρούνται με το 5; (απάντηση:60)

Διατάξεις με Επανάληψη $\boxed{n^k}$

Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να προγραμματιστούν τρία διαγωνίσματα σε μία περίοδο πέντε ημερών, χωρίς περιορισμό στον αριθμό των διαγωνισμάτων που προγραμματίζονται για την ίδια ημέρα; (Απάντηση: 125)

Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε συμβολοσειρές από τέσσερα γράμματα; (επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο γράμμα πολλές φορές) (Απ:331776).

Συνδυασμοί χωρίς Επανάθεση

Ας επιστρέψουμε στο πρόβλημα στο οποίο τοποθετούμε ***k* μπάλες σε *n* διαφορετικά αριθμημένα κουτιά.** Αυτή τη φορά θα υποθέσουμε ότι **όλες οι μπάλες είναι ίδιες**. Όπως γνωρίζουμε οι διαφορετικές διατάξεις για *k* διαφορετικές μπάλες είναι:

$$P(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Υπάρχουν *k*! μεταθέσεις των *k* αντικειμένων στις *k* θέσεις. Αφού όμως τα *k* αντικείμενα είναι ίδια στην ουσία κάθε *k*! διατάξεις αποτελούν μία διάταξη. Συνεπώς τον παραπάνω αριθμό θα πρέπει να τον διαιρέσουμε με *k*! **Άρα υπάρχουν**

$$\boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

τρόποι για να τοποθετήσουμε *k* ίδιες μπάλες σε *n* διαφορετικά αριθμημένα κουτιά. Η ποσότητα αυτή συμβολίζεται και *C*(*n*, *k*).

Παράδειγμα : Έστω ότι θέλουμε να έχουμε ψάρια για φαγητό τις τρεις από τις επτά ημέρες της εβδομάδας. Με πόσους τρόπους μπορούμε να προγραμματίσουμε το εβδομαδιαίο μενού;

Υπάρχουν *C*(7, 3)=7!/(3!4!) =35 τρόποι για να τοποθετήσουμε 3 ίδια φαγητά (ίδιες μπάλες) σε 7 διαφορετικές μέρες (αριθμημένα κουτιά).

Άρα ο αριθμός των τρόπων για να επιλέξουμε *k* από *n* διαφορετικά αντικείμενα είναι επίσης *C*(*n*, *k*). Με άλλα λόγια σε ένα σύνολο με πληθικό αριθμό *n* υπάρχουν *C*(*n*, *k*) υποσύνολα μεγέθους *k*.

Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μία 5μελή επιτροπή από 11 άτομα; (απάντηση: *C*(11,5)=462)

Παράδειγμα: Σε μία τάξη 100 φοιτητών υπάρχουν 40 αγόρια.
α) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μία 10μελής επιτροπή; (απάντηση:(100,10)=100!/(10!90!)= 17.310.309.456.440)
β) Επαναλάβατε το (α) αν πρέπει να υπάρχουν ίσοι αριθμοί αγοριών και κοριτσιών στην επιτροπή. (απ: 3.593.718.588.096)
γ) Επαναλάβατε το (α) αν η επιτροπή πρέπει να αποτελείται είτε από 6 αγόρια και 4 κορίτσια, είτε από 4 αγόρια και 6 κορίτσια. (απ:1.871.728.431.300+4.575.336.165.400=6.447.064.596.700)

Παράδειγμα: Έστω ότι σε ένα διαγώνισμα πρέπει να απαντήσουμε σε 8 από τις 10 ερωτήσεις.
α) Πόσες επιλογές έχουμε; (απ: 45)
β) Πόσες επιλογές έχουμε αν πρέπει να απαντήσουμε υποχρεωτικά στις τρεις πρώτες ερωτήσεις; (απ:21).
γ) Πόσες επιλογές έχουμε αν πρέπει να απαντήσουμε τουλάχιστον στις 4 από τις 5 πρώτες ερωτήσεις;
Υπάρχουν δύο τρόποι να απαντήσουμε: Ο πρώτος τρόπος είναι να απαντήσουμε ακριβώς 4 ερωτήσεις από τις 5 πρώτες και 4 από τις 5 τελευταίες ερωτήσεις. Ο δεύτερος τρόπος είναι να απαντήσουμε και τις 5 πρώτες ερωτήσεις και άλλες 3 από τις5 τελευταίες. Με το πρώτο τρόπο

έχουμε $C(5,4)$x$C(5,4)$ επιλογές. Με το δεύτερο τρόπο έχουμε$C(5,5)$x$C(5,3)$ επιλογές. Το πείραμα μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με έναν από τους δύο παραπάνω τρόπους. Συνεπώς εφαρμόζουμε το κανόνα του αθροίσματος: $C(5,4)$x$C(5,4)$+$C(5,5)$x$C(5,3)$=5x5+1x10=35

Συνδυασμοί με Επανάθεση

Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 ίδιες μπάλες σε 5 διαφορετικά κουτιά, υπό την προϋπόθεση ότι σε κάθε κουτί μπορούμε να βάλουμε όσες μπάλες θέλουμε;

Γενικότερα ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε k ίδιες μπάλες σε n διαφορετικά αριθμημένα κουτιά υπό την προϋπόθεση ότι σε κάθε κουτί μπορούμε να βάλουμε όσες μπάλες θέλουμε είναι:

$$\boxed{C(k+n-1,k)=\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}}$$

Παράδειγμα: Ποιος είναι ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων όταν ρίχνουμε ένα ζάρι τρεις φορές και ποιος όταν ρίχνουμε τρία ζάρια μαζί;

Όταν ρίχνουμε ένα ζάρι τρεις φορές σε κάθε ρίψη έχουμε 6 πιθανά αποτελέσματα. Το αποτέλεσμα των τριών ρίψεων είναι μία <u>διατεταγμένη</u> τριάδα {x, y, z}, όπου τα x, y, και z μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε από τις τιμές 1,2,3,4,5 και 6. Συνεπώς ο συνολικός τρόπος των πιθανών αποτελεσμάτων είναι 6^3=216. Όταν ρίχνουμε τρία ζάρια μαζί δεν μας ενδιαφέρει τι έφερε το κάθε ζάρι (άλλωστε δεν μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε). Μας ενδιαφέρει το αποτέλεσμα που έφεραν και τα τρία ζάρια μαζί. Το πρόβλημα αυτό είναι ένα πρόβλημα επιλογής (χωρίς διάταξη) 3 αντικειμένων από 6 με δυνατότητα επανάληψης. Άρα ο συνολικός αριθμός αποτελεσμάτων είναι:

$$C(3+6-1,3)=C(8,3)=\frac{8!}{3!5!}=\frac{40320}{6\times 120}=56$$

Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 5 φοιτητές σε 12 καρέκλες;

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να λυθεί με το τύπο $P(12,7)$=12!/7!= 95040.
Μία διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα θα ήταν η παρακάτω:Έστω ότι πρώτα διατάσσουμε τους 5 φοιτητές. Υπάρχουν 5! τρόποι να το κάνουμε αυτό. Στη συνέχεια τοποθετούμε τις άδειες καρέκλες αυθαίρετα είτε ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε φοιτητές, είτε στα δύο άκρα. Το πρόβλημα της τοποθέτησης των 7 άδειων καρεκλών είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα της τοποθέτησης 7 ίδιων μπαλών σε 6 κουτιά. Άρα ο συνολικός αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τις καρέκλες είναι: $C(7+6-1,7)=C(12,7)=\frac{12!}{7!5!}$ Εφόσον θα πρέπει να πραγματοποιηθούν και τα δύο παραπάνω πειράματα (τοποθέτηση φοιτητών και τοποθέτηση καρεκλών), εφαρμόζουμε το κανόνα του γινομένου και το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$5!\times C(12,7)=5!\frac{12!}{7!5!}=\frac{12!}{7!}=95040$$

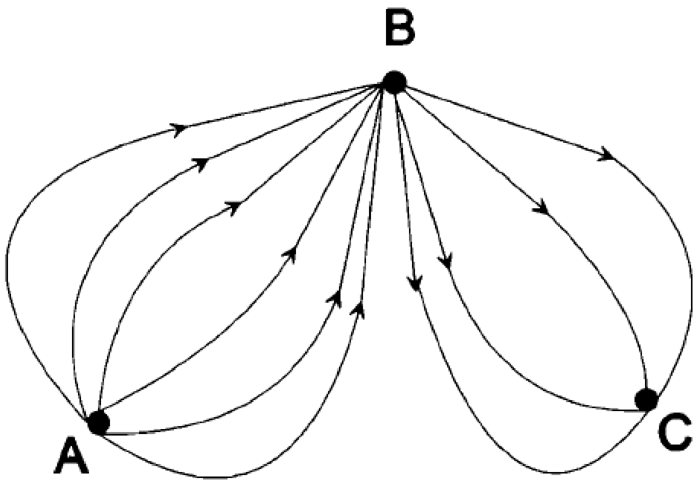
Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε ένα μεγάλο πλήθος από νομίσματα των 5, 10, 20 και 50 λεπτών. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 5 νομίσματα; (απ:$C(k+n-1,k)$ για k=5 και n=4)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

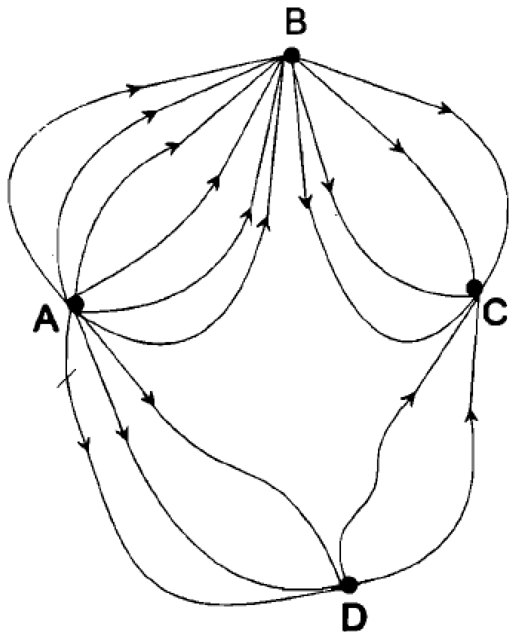
Problem 1. There are five different teacups and three different tea saucers in the "Tea Party" store. How many ways are there to buy a cup and a saucer?

Problem 2. There are also four different teaspoons in the "Tea Party" store. How many ways are there to buy a set consisting of a cup, a saucer, and a spoon?

Problem 3. There are three towns A, B, and C, in Wonderland. Six roads go from A to B, and four roads go from B to C (see Figure 8). In how many ways can one drive from A to C?



Problem 4. A new town called D and several new roads were built in Wonderland (see Figure 9). How many ways are there to drive from A to C now?



Problem 5. There are five different teacups, three saucers, and four teaspoons in the "Tea Party" store. How many ways are there to buy two items with different names?

Problem 6. We call a natural number "odd-looking" if all of its digits are odd. How many four-digit odd-looking numbers are there?

Problem 7. We toss a coin three times. How many different sequences of heads and tails can we obtain?

Problem 8. Each box in a 2 x 2 table can be colored black or ,white. How many different colorings of the table are there?

Problem 9. How many ways are there to fill in a Special Sport Lotto card? In this lotto you must predict the results of 13 hockey games, indicating either a victory for one of two teams, or a draw.

Problem 10. The Hermetian alphabet consists of only three letters: A, B, and C. A word in this language is an arbitrary sequence of no more than four letters. How many words does the Hermetian language contain?

Hint. Calculate separately the numbers of one-letter, two-letter, three-letter, and four-letter words.

Problem 11. A captain and a deputy captain must be elected in a soccer team with 11 players. How many ways are there to do tllis?

Problem 12. How many ways are there to sew one three-colored flag with three horizontal strips of equal height if we have pieces of fabric of six colors? We can distinguish the top of the flag from the bottom.

Problem 13. How many ways are there to put one white and one black rook on a chessboard so that they do not attack each other?

Problem 14. How many ways are there to put one white and one black king on a chessboard so that they do not attack each other?

Factorial ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟ

ασκήσεις

Exercise 1. Simplify the expressions a) 1O! 11; b) n! (n + 1).

Exercise 2. a) Calculate 100!/98!; b) Simplify n!/(n - I)!.

Exercise 3. Prove that if p is a prime number, then (p - I)! is not divisible by p.

Problem 15. How many three-digit numbers can be written using the digits I, 2, and 3 (without repetitions) in some order?

Problem 16. How many ways are there to lay four balls, colored red, black, blue, and green, in a row?

In the following fiveproblems you must calculate the number of different words that can be obtained by rearranging the letters of a particular word.

Problem 17. "VECTOR"

Problem 18. "TRUST"

ΠΗΓΕΣ:
1)http://combinatorics.scientist.gr/
2) Mathematical Circles (Russian Experience)