1. Υπάρχουν 20 πόλεις σε μια χώρα και κάθε ζευγάρι από αυτές συνδέεται με μια αεροπορική γραμμή. Πόσες τέτοιες αεροπορικές γραμμές υπάρχουν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Solution. Every route connects two towns. We can choose any of the 20 towns in the country (say, town A) as the beginning of a route, and we have 19 remaining towns to choose the end of a route (say, town B) from. Multiplying, we have $20 \quad 19 = 380$. However, this calculation counted every route AB twice: when A was chosen as the beginning of the route, and when B was chosen as the beginning. Hence, the number of routes is $380/2 = 190$.

2. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δρομολόγια μεταξύ των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος και ότι τα διαστημόπλοια μπορούν να κάνουν τις εξής διαδρομές: Γη-Ερμής, Πλούτωνας-Αφροδίτη, Γη-Πλούτωνας, Πλούτωνας-Ερμής, Ερμής-Αφροδίτη, Ουρανός Ποσειδώνας, Ποσειδώνας-Κρόνος, Κρόνος-Δίας, Δίας-Άρης και Άρης-Ουρανός. Μπορεί κανείς να ταξιδέψει από τη Γη στον Άρη;

Solution. We can draw a diagram, in which the planets will be represented by points, and the routes connecting them by non-intersecting line segments (see Figure 19). It is now clear that it is impossible to travel from Earth to Mars.

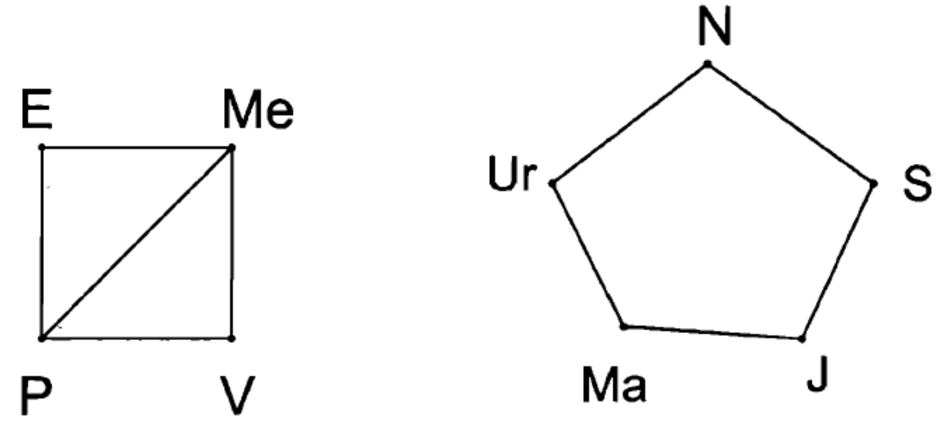

FIGURE 19

3. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 2^{50}. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Solution. Let us write down the last digits of the first few powers of two: 2, 4, 8, 6, 2, We can see that 2^5 ends with 2, as does 2^1 Since the last digit of any power is determined by the last digit of the previous power of 2, we have a cycle: 2^6 ends with 4 (like 2^2), 2^7 ends with 8 (like 2^3), 2^8 ends with 6, 2^9 ends with 2, et cetera. Since the length of the cycle is 4, the last digit of the number 2^{50} can be found using the remainder of the number 50 when divided by 4. This remainder is 2 and the last digit of 2^{50} coincides with the last digit of 2^2, which is 4.

4. Δύο παιδιά σπάζουν μια ορθογώνια σοκολάτα με διαστάσεις (σε τετραγωνάκια σοκολάτας) 6 και 8. Η σοκολάτα μπορεί να σπάσει μόνο κατά μήκος των χωρισμάτων που έχει. Τα παιδιά συνεχίζουν να σπάζουν τα κομμάτια εως ότου μείνουν μεμονωμένα τετραγωνάκια σοκολάτας. Το παιδί που δεν θα μπορεί να σπάσει άλλο κομμάτι χάνει το παιχνίδι. Ποιος θα κερδίσει; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Solution. After each move, the number of pieces increases by one. At first, there is only one piece. At the end of the game, when no more moves are possible, the chocolate is divided into small squares, and there are 48 of these. So there must have been 47 moves, of which the last, as well as every other odd-numbered move, was made by the first player. Therefore, the first player will win, no matter how the play proceeds.